



فرآیندهای تصادفی  
زنجیره مارکوف

محسن هوشمند  
دانشکده تکنولوژی اطلاعات و علم رایانه  
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

# مقدمه و شرح مسئله

وجود فرایندی دارای مقدار در هر بازهٔ زمان

$X_n$  نمایش مقدار آن در زمان  $n$

به دنبال ساخت مدل احتمالی از دنباله مقادیر متوالی  $X_0, X_1, X_2, \dots$

ساده‌ترین مدل؟

▪  $X_n$  -ها متغیرهای تصادفی مستقل از هم

▪ معمولا فرضی غیرموجه

▪ مثال -  $X_n$  نمایش قیمت سهمی از اوراق بهادار شرکتی چون دیجی کالا در پایان روز  $n$  معاملات

▪ آن‌گاه غیرمعقولی فرض استقلال قیمت در پایان روز تجاری  $n+1$  از قیمت‌های روزهای  $n-1$  و  $n-2$  و ... و  $0$

در عوض، معقول بودن فرض وابستگی قیمت در پایان روز تجاری  $n+1$  به قیمت‌های پایانی قبلی از طریق قیمت پایانی روز  $n$

بنابراین معقول بودن فرض وابستگی توزیع شرطی  $X_{n+1}$  با داشتن تمامی قیمت‌های پایانی قبلی  $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$  وابسته به قیمت پایانی روز  $n$

▪ فرض مذکور معرفی نوعی فرایند تصادفی با نام «زنجیره مارکوف»

# از کجا آمده‌ام، آمدنم بهر چه بود!

مارکوف کیست؟!

زنجیرش را کجا بافت!!

پوشکین چکاره است؟

چه شد که اینطور شد؟

# از کجا آمده‌ام، آمدنم بهر چه بود!

اندری اندرویچ مارکوف

▪ ۱۸۵۶ تا ۱۹۲۲ مسیحی

▪ دانشجو در سن پترزبورگ

▪ کار با چبیشف

▪ کسب دکتری در سال ۱۸۸۴

▪ استاد در دانشگاه پترزبورگ

▪ آکادمیسین آکادمی علوم

▪ بازنشستگی در سن ۴۹ سالگی ۱۹۰۵

▪ انجام مشهورترین کارهایش پس از بازنشستگی

# از کجا آمده‌ام، آمدنم بهر چه بود!

ادامه تحقیقات در امتداد کار چبیشف روی قاعده اعداد بزرگ

مربط با مسئله‌های کوزه (گلدان) برنولی

▪ Bernoulli urn Prbs.

▪ عدم صفحه ویکی‌پدیای فارسی

مخالفت شدید با نکراسوف

# قانون اعداد بزرگ

متغیر تصادفی  $X$

فرض امید آن برابر  $E[X]$  نزدیک تر شدن میانگین نتایج به امید ریاضی آن

اگر  $n$  مشاهده از این متغیر تصادفی بگیریم

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

قانون اعداد بزرگ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n \rightarrow E[X]$$

مثال -  $X$  تعداد شیرهای حاصل از ۱۰۰ بار پرتاب سکه سالم

$$E[X] = 0.5 * 100 = 50 \quad \bullet$$

$$\bar{X}_n = \frac{56+67+44+\dots+X_n}{n} \quad \bullet$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n \rightarrow 50 \quad \bullet$$

اشتباه قمارباز

# نکراسوف و اراده آزاد

اعمال داوطلبانه بدون ارتباطات علی انجام می‌شوند  
▪ همانند آزمایش‌های مستقل در نظریه احتمال

قانون اعداد بزرگ یا قضیه حد مرکزی صرفاً در پدیده‌های مستقل مشاهده می‌شود  
قانون اعداد بزرگ در آمار اجتماعی نیز مشاهده شده است  
بنابراین افراد آزادانه و با اراده آزاد عمل می‌کنند.

# مخالفت مارکوف

هدف

▪ استقلال برای قانون اعداد بزرگ لازم نیست

۱۹۰۶

▪ یافتن اولین مدل خاص که قانون اعداد بزرگ برای متغیرهای وابسته و غیرمستقل نیز جاری و ساری است

۱۹۰۷-۱۹۱۱

▪ تعمیم مدل به انواع مختلفی و وسیع‌تری از نظام‌ها

۱۹۱۳

▪ اعمال مدل به تحلیل لغوی رمان «یوگینی آنگین»

▪ نویسنده: پوشکین



استقلال کمیته‌ها جزو سازنده شرط لازم برای وجود قانون اعداد بزرگ نیست

- جدید بود؟

- نشانه‌های قبلی

- مطالعات فرما و پاسکال دربارهٔ پاکبختگی قمارباز

- بعضی مدل کوزه‌های دانیال برنولی

- فرایند شاخه‌زنی گالتون-واتسن

- بدون جلب توجه فراوان

- استقلال خوب جواب می‌داد و نیازی به بررسی وابستگی نبود

- نبود رایانش ماشینی

- مارکوف کاربردی نبود



# پروژه «آنگین» مارکوف

اشاره پوشکین در کتاب یوگنی آنگین به سعدی

«بعضی‌ها از این دنیا رفته‌اند و بعضی‌ها در مسافرت دور و دراز هستند، چنان که سعدی در زمان خود گفته بود.»

منظور پوشکین اشعار زیر

شنیدم که جمشید فرخ‌سرشت

به سرچشمه‌ای بر، به سنگی نوشت:

«بر این چشمه چون ما بسی دم زدند

برفتند، چون چشم برهم زدند»

# پروژه «آنگین» مارکوف

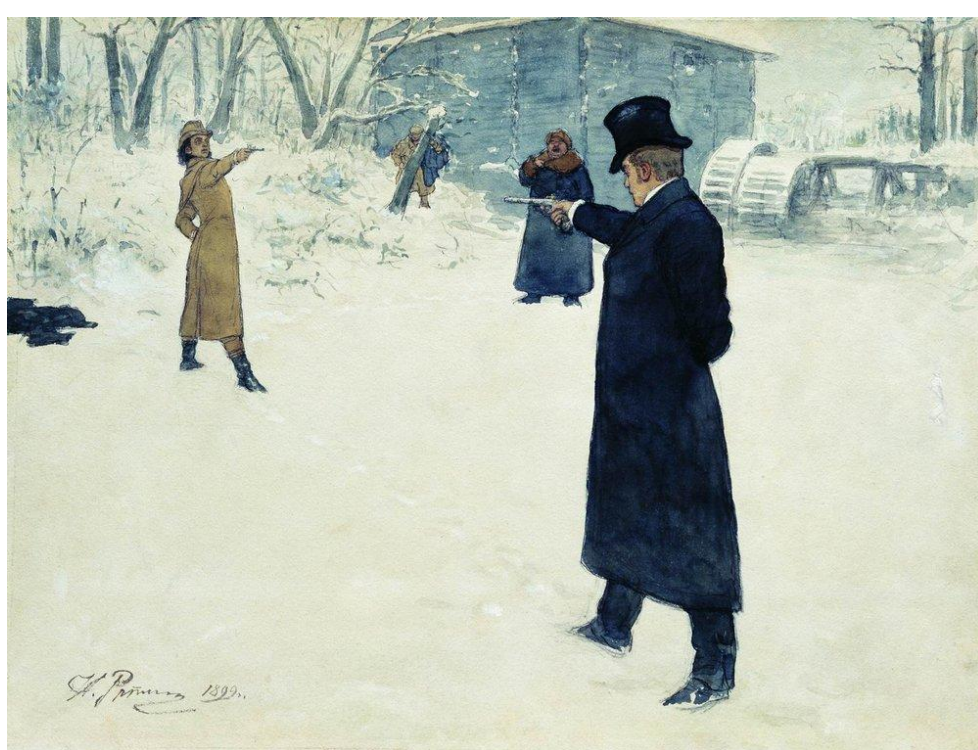
جمع‌آوری بیست‌هزار نویسه‌های نسخه کتاب

حذف علائم سجاوندی و فاصله‌ها

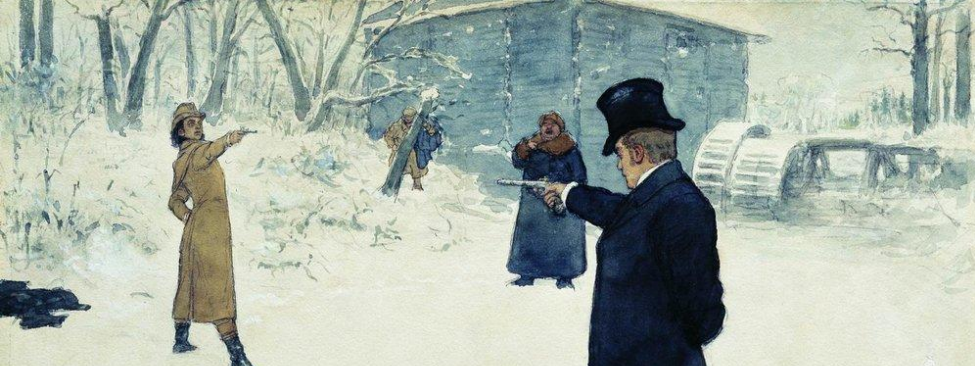
شمردن مصوت‌ها و صامت‌ها

شمارش جفت‌ها «مص» و «صم» و «صص» و «مم»

محاسبه گشتاورهای ( میانگین و وردائی )







## پروژه «آنگین» مارکوف

My uncle -- high ideals inspire him;  
but when past joking he fell sick,  
he really forced one to admire him --  
and never played a shrewder trick.  
Let others learn from his example!  
But God, how deadly dull to sample  
sickroom attendance night and day  
and never stir a foot away!  
And the sly baseness, fit to throttle,  
of entertaining the half-dead:  
one smooths the pillows down in bed,  
and glumly serves the medicine bottle,  
and sighs, and asks oneself all through:  
"When will the devil come for you?"

جمع آوری بیست هزار نویسه‌ها

حذف علائم سجاوندی و فاصل

شمردن مصوت‌ها و صامت‌ها

شمارش جفت‌ها «م ص» و «م

محاسبه گشتاورهای ( میانگین

نظریه اطلاعات شانون

- استفاده از زنجیره مارکوف در تعریف انتروپی زبان
- ۱۹۴۸

مونتی کارلو زنجیره مارکوف

▪ MCMC

البته عنوانش در مقاله متروپولیس نیامده

اولین بار در سال ۱۹۶۴

- فصلی از کتاب

کلین راک

# زنجیره مارکوف با زمان گسسته

زمان گسسته با اندیس  $n = 0, 1, 2, \dots$

$X_n$  نمایشگر حالت در زمان  $n$

$\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  فرایندی تصادفی

▪ مقدارگیری  $X_n$  از مجموعه‌ای مقادیر متناهی یا شمارا

$$X_n = i$$

▪ فرایند در حالت  $i$  در زمان  $n$

# زنجیره مارکوف با زمان گسسته

زنجیره مارکوف (زم)

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1, i, j, X_k = i_k, k = 0, \dots, n-1 \\ P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, X_{n-3} = i_{n-3}, \dots, X_0 = i_0) \\ = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P_{ij}^{n, n+1} \end{aligned}$$

آینده صرفاً وابسته به حالت فعلی  $X_n$

- خاصیت مارکوفی
- بدون حافظگی

آینده مستقل شرطی از گذشته، «با داشتن حال»

$$P_{ij}^{n, n+1}$$

- به معنای احتمال انتقال فرایند از حالت  $i$  در زمان  $n$  به حالت  $j$  در زمان  $n+1$

# ویژگی‌ها و جزئیات

با داشتن  $X_n$ ، تمامی زمان‌های قبلی بی‌تاثیر بر ارزیابی آینده فرایند

بنابراین با مشاهده خاصیت مارکوفی و هر  $m > 0$ :

$$\forall n \geq 1, i, j, X_k = i_k, k = 0, \dots, n-1$$

$$\begin{aligned} P(X_{n+m} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, X_{n-3} = i_{n-3}, \dots, X_0 = i_0) \\ = P(X_{n+m} = j | X_n = i) \end{aligned}$$

احتمال انتقال تک-مرحله (احتمال انتقال)

▪ استقلال احتمالات تک-مرحله از متغیر زمان  $n$

$$P_{ij}^{n,n+1} = P_{ij}$$

▪ ثابت  $\Leftarrow$  زم تغییرناپذیر با زمان (ایستا)

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P(X_1 = j | X_0 = i) = P_{ij}$$

▪ احتمال  $P_{ij}$

$$\forall i: \sum_{j=0}^{+\infty} P_{ij} = 1 \text{ و } P_{ij} \geq 0$$

▪ احتمالات شرطی برآورده کننده اصل آغازهای کولمولگروف



# نمایش ماتریسی زنجیره مارکوف

ماتریس احتمال انتقال  $P$

▪ جمع کردن  $P_{ij}$

$$P = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \dots & P_{0j} & \dots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{i0} & P_{i1} & P_{i2} & \dots & P_{ij} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

معمولا تعداد حالتها متناهی

▪ در غیر این صورت ماتریس نیست

شرطها

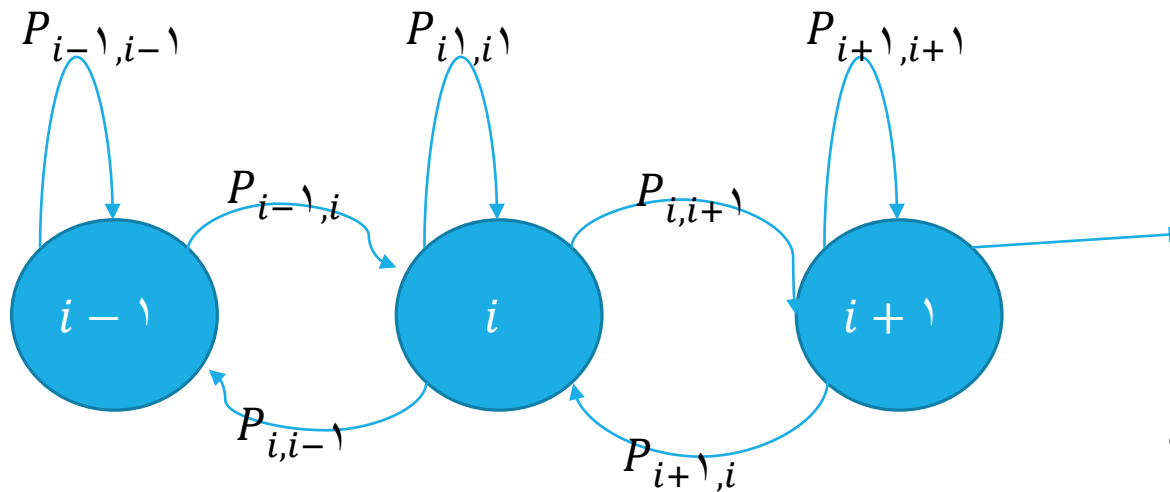
▪  $\sum_{j=0}^{+\infty} P_{ij} = 1$  و  $P_{ij} \geq 0$

▪ جمع سطری برابر یک

▪ شرط اخیر: در هر مرحله حتما انتقالی رخ خواهد داد

# نمایش گرافی

نمودار انتقال حالت



مناسب جهت حالت‌های نامتناهی

بدون پیکان هنگام  $P_{ij} = 0$

جمع پیکان‌های خروجی از هر حالت باید برابر یک

# مثال - پیش‌بینی وضع هوا

شانس باران فردا

- صرفاً وابسته شرایط جوی امروز
- یا به دیگر سخن وابسته به بارش یا عدم بارش امروزِ باران
- بدون وابستگی به دیروز و روزهای قبل

تعریف احتمال شرطی بارش

- $\alpha$  احتمال بارش فردا به شرط بارش امروز
- $\beta$  احتمال بارش فردا به شرط عدم بارش امروز

تعریف حالت‌ها

- 0: فرایند در حالت 0 در روز بارش
- 1: فرایند در حالت 1 در روز عدم بارش

ایجاد زنجیره مارکوف دو حالتی

احتمال‌های انتقال

$$P = \begin{bmatrix} \alpha & 1 - \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{bmatrix}$$

# مثال - دستگاه مخابراتی

دستگاه مخابراتی ارسال کننده بیت 0 یا 1

ارسال از طریق چندین کانال و محیط

احتمال تغییر بیت از 0 به 1 و بالعکس

احتمال

▪ احتمال عدم تغییر بیت هنگام دریافت در گیرنده

▪ فرض احتمال عدم تغییر بیت برای هر دوی 0 و 1 یکسان

$$P = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix}$$

$X_n$

▪ ورود بیت به کانال n-ام

▪  $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$

حالت‌ها: دو حالت یا زنجیره مارکوف دو حالتی

# مثال - شاد و معمولی و غمگین

حال و احوال

احتمال

- اگر امروز شاد آنگاه احتمال شادی و معمولی و غمگینی فردا به ترتیب ۰,۵ و ۰,۴ و ۰,۱
- اگر امروز معمولی آنگاه احتمال شادی و معمولی و غمگینی فردا به ترتیب ۰,۳ و ۰,۴ و ۰,۳
- اگر امروز غمگین آنگاه احتمال شادی و معمولی و غمگینی فردا به ترتیب ۰,۲ و ۰,۳ و ۰,۵

$X_n$

▪ نمایشگر حال و احوال مش سکینه

▪  $\{X_n, n \geq 0\}$

حالاتها

▪ سه حالت یا زنجیره مارکوف سه حالتی

▪ شاد یا حالت 0 و معمولی یا حالت ۱ و غمگین یا حالت ۲

ماتریس انتقال حالت

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$$

# مثال - تبدیل فرایندی به زنجیره مارکوفی

عدم بارش امروز وابسته به دو روز قبل

- اگر دو روز قبل دارای بارش باران، بارش باران در فردا با احتمال ۰,۷
- اگر امروز بارانی و دیروز بدون بارش، بارش باران فردا با احتمال ۰,۵
- اگر امروز بدون باران و دیروز بارش، بارش باران فردا با احتمال ۰,۴
- اگر دو روز بدون بارش، بارش باران فردا با احتمال ۰,۲

زنجیره مارکوف؟

- امکان تبدیل به زنجیره مارکوف
- مشخص شدن وضعیت جوی در هر زمان با آبوهوا دیروز و امروز
- یا به دیگر سخن - تعریف حالتها

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

- حالت 0 بارش باران امروز و دیروز
- حالت 1 عدم بارش باران امروز و بارش باران دیروز
- حالت 2 بارش باران امروز و عدم باران دیروز
- حالت 3 عدم بارش باران امروز و دیروز

جدول انتقال حالت زنجیره مارکوف چهار حالتی

▪ نیاز به بررسی دقیق ماتریس

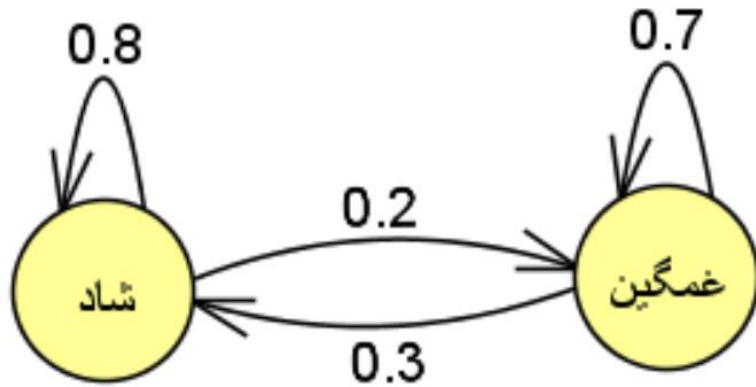
# مثال - شاد و غمگین

شاد  $X=0$  و غمگین  $X=1$

▪ حال و هوای فردای فرد صرفاً از حال و هوای امروز تاثیر می‌پذیرد.

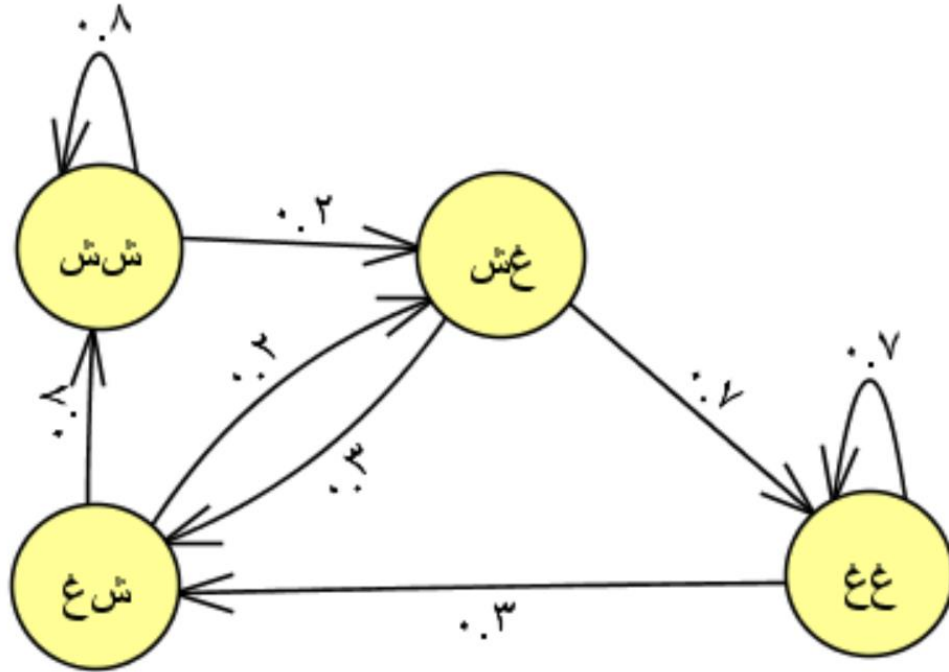
▪ حالت فردا احتمالاً شبیه حالت امروز

▪ ولی غمگین احتمال کمتر برای فردا



$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

# مثال - حافظه



حال فردای فرد تحت تاثیر حال امروز و یروز  
▪ صرفا زنجیره مارکوف نیست

؟

دو حال قبلی تشکیل دهنده چهار حالت

- شش
- شغ
- غش
- غغ

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0.3 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

حالت‌های بعدی

- شش و شغ تبدیل به شش یا شش غش
- غش و غغ تبدیل به غغ یا شغ

امکان افزودن حافظه با حالت **افزوده**





# مثال - حق بیمه سالانه خودرو

$s_i(k)$

- حالت بعدی بیمه شده‌ای که در سال پیش
- در حالت  $i$
- جمع  $k$  ادعا در آن سال

فرض

- تعداد ادعاهای بیمه شده متغیر تصادفی پواسن با پارامتر  $\lambda$
- آن‌گاه تشکیل زنجیره مارکوفی از حالت‌های متوالی بیمه شده با احتمال انتقال

$$P_{ij} = \sum_{k: s_i(k)=j} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, j \geq 0$$

- معمولا دارای حالت‌های فراوان
- جدول صفحه بعد نظام پاداش-جریمه با چهار حالت

# مثال - حق بیمه سالانه خودرو

حالت بعدی				مبلغ پرداخت بیمه	حالت
$\geq 3$	دو ادعا	یک ادعا	بدون ادعا		
۴	۳	۲	۱	۲۰۰	۱
۴	۴	۳	۱	۲۵۰	۲
۴	۴	۴	۲	۴۰	۳
۴	۴	۴	۳	۶۰۰	۴

$$s_2(0) = 1$$

فرض بیمه‌شده‌ای دارای توزیع تصادفی در درخواست‌های سالانه با پارامتر  $\lambda$

▪ احتمال  $a_k$  ادعا در طول یک سال

$$a_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, j \geq 0$$

▪ ماتریس انتقال احتمال

$$P = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 1 - a_0 - a_1 - a_2 \\ a_0 & 0 & a_1 & 1 - a_0 - a_1 \\ 0 & a_0 & 0 & 1 - a_0 \\ 0 & 0 & a_0 & 1 - a_0 \end{bmatrix}$$

# مثال - افتان و خیزان می روی

قدم به راست با احتمال  $0 < p < 1$

قدم به چپ با احتمال  $1 - p$   
▪ راه مستقیم نمی تواند

حالتها

▪  $0, \pm 1, \pm 2, \dots$

▪ تعداد نامتناهی از حالتها

▪ احتمالهای انتقال

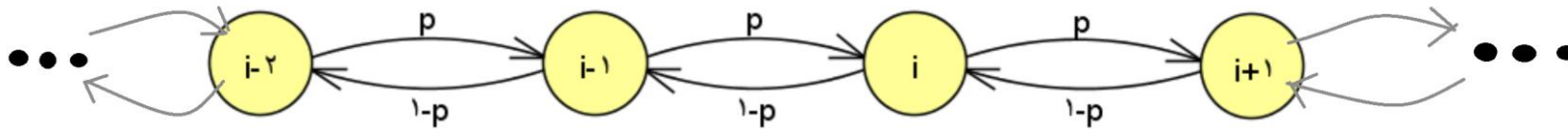
$$P_{i,i+1} = p$$

$$P_{i,i-1} = 1 - p$$

$$P_{i,i+1} = p = 1 - P_{i,i-1}$$

$$P_{i,j} = 0$$

▪ گام تصادفی (ولگشت)



# ولگشت متناهی! شرط بندی

▪ با شرط توقف حرکت با رسیدن به حالت های  $X_n = 0$  یا  $X_n = I$

▪  $X_n = 0$  پاکباخته - وقتی جیبش خالی می شود

▪  $X_n = I$  کل مبلغ را به چنگ می آورد

▪ حالت ها تعدادی متناهی  $0, 1, \dots, I$

▪ احتمالات انتقال

$$P_{i,i+1} = p$$

$$P_{i,i-1} = 1 - p$$

$$P_{II} = 1$$

$$P_{00} = 1$$

$$P_{i,j} = 0 \text{ بقیه انتقال ها}$$

▪ حالت های  $0$  و  $I$ : حالت مانا (جذب کننده، جاذب، گیرا، گیرنده، تله، پایانی؟) ماندن همیشگی در آن به محض رسیدن به این حالت

▪ حالت گذرا: احتمال ناصفر جهت بازنگشتن به این حالت.

▪ یا تعداد برگشت های به این حالت نامتناهی نیست.

▪ در مقابل: حالت بازگشتی یا پایا: تعداد برگشت نامتناهی به این حالت

# ول گشت دوبعدی

قدمی تصادفی در جهت‌های شمال، جنوب، شرق، غرب

▪ انتخاب جهت با احتمال برابر

▪ امکان اظهار حالت‌ها با دو تصادفی  $(X_n, Y_n)$

▪ برد هر یک

$$X_n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$Y_n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

▪ احتمال‌های انتقال، صرفاً غیر صفر برای نقاط همسایه

$$P(X_{n+1} = i, Y_{n+1} = j + 1 \mid X_n = i, Y_n = j) = \frac{1}{4} \text{ شمال}$$

$$P(X_{n+1} = i, Y_{n+1} = j - 1 \mid X_n = i, Y_n = j) = \frac{1}{4} \text{ جنوب}$$

$$P(X_{n+1} = i - 1, Y_{n+1} = j \mid X_n = i, Y_n = j) = \frac{1}{4} \text{ غرب}$$

$$P(X_{n+1} = i + 1, Y_{n+1} = j \mid X_n = i, Y_n = j) = \frac{1}{4} \text{ شرق}$$

# ول گشت

پرسش

▪ امکان بازگشت به مبدأ و نقطه آغاز؟

هم احتمال

▪ یک و دوبعدی

▪ برگشت به مبدأ به طور حتم

▪ با احتمال یک به مبدا برمی گردند

▪ بعد بیشتر از دو

▪ برگشت به مبدا با احتمال کمتر از یک

▪ در سه بعدی احتمال برگشت به مبدا  $0,34$

▪  $0,19$  و  $0,14$  و  $0,1$  و  $0,08$

▪ بیشتر سپس تر

# ول گشت

فضای  $d$  بعدی

$e_i$  بردار یکه  $d$  بعدی با مقدار یک در محور  $i$  و صفر در بقیه جاها و  $i \in \{1, \dots, d\}$

فرض توزیع شدگی یکسان و مستقل از هم  $X_1, X_2, X_3, \dots$

ول گشت ساده

$$S_n = \mathbf{x} + \sum_{j=1}^n X_j$$

$\mathbf{x}$  نمایشگر محل در زمان شروع یا  $j = 0$   
معمولا برابر بردار صفر

$X_j$  نمایشگر حرکت از زمان  $j$  به  $j + 1$

ول گشت متقارن

$$P(X_j = e_i) = P(X_j = -e_i) = \frac{1}{2d}, i = 1, 2, \dots, d$$



# ول گشت

$$S_n = x = 0$$

پرسش: ولگشت نوعی زنجیره مارکوفی است؟

$$S_n = S_{n-1} + X_n, n \geq 1$$

بله

$X_n$  مستقل از  $S_n$

$$\begin{aligned} P(S_n = j | S_{n-1} = i, S_{n-2} = s) &= P(S_{n-1} + X_n = j | S_{n-1} = i, S_{n-2} = s) \\ &= P(X_n = j - i) = P_{ij} \end{aligned}$$

قاعده جانشینی

# ول گشت

قضیه

▪  $Y_{\mathbb{N}} = Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$  توزیع یکسان و مستقل از هم

▪ همگی مستقل از  $X_0$

▪ هم چنین  $X_{\mathbb{N}} = X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  به صورت  $X_j = f(X_{j-1}, Y_j)$

▪ آن گاه  $X_{\mathbb{N}}$  زنجیره مارکوفی است با احتمالات انتقالی:

$$P_{ij} = P(f(i, Y_j) = j)$$

# فرایند مارکوفی

$$P(X_0 = i_0) = P_{i_0}$$

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2, X_3 = i_3, \dots, X_n = i_n)$$

$$\begin{aligned} &P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2, X_3 = i_3, \dots, X_n = i_n) \\ &= P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2, X_3 = i_3, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) \\ &\times P(X_n = i_n | X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2, X_3 = i_3, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) \\ &= P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2, X_3 = i_3, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) \times P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}) \\ &= P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2, X_3 = i_3, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) \times P_{i_{n-1}, n} \\ &= \\ &\vdots \\ &= P_{i_0} \times P_{i_0, 1} \times \dots \times P_{i_{n-2}, n-1} \times P_{i_{n-1}, n} \end{aligned}$$

امکان تعریف کامل فرایند مارکوفی

- ماتریس احتمال انتقال
- و حالت آغازین  $X_0$
- یا توزیع احتمالی  $X_0$
- استفاده از قاعده حاصل ضرب

$$\begin{aligned} &P(X_{n+1} = j_1, \dots, X_{n+m} = j_m | X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2, X_3 = i_3, \dots, X_n = i_n) \\ &= P(X_{n+1} = j_1, \dots, X_{n+m} = j_m | X_n = i_n) \end{aligned}$$

# ماتریس‌های احتمال انتقال چندگامه

تعریف با ماتریس انتقال و توزیع احتمال در لحظه آغاز  
هنگام چند انتقال چه؟

$$P_{ij}^2 = P(X_{m+2} = j | X_m = i)$$

- آیا برابر با  $P_{ij}P_{ij}$ ؟
- خیر  $P_{ij}^2 \neq P_{ij}P_{ij}$

احتمالات انتقال  $n$ -گامی  $P_{ij}^{(n)}$   
احتمال  $X_{m+n}$  با داشتن  $X_m$

$$P_{ij}^{(n)} = P(X_{m+n} = j | X_m = i)$$

- خاصیت مارکوفی موجب امکان بیان  $P_{ij}^{(n)}$  با  $P_{ij}$
- یا نوشتن  $P_{ij}^{m+n}$  بر اساس  $P_{ij}^m$  و  $P_{ij}^n$
- معادلات چپمن-کولمولگروف

# احتمال انتقالِ دو-گامی

احتمال انتقال در دو گام

$$P_{ij}^{\gamma} = P(X_{m+\gamma} = j | X_m = i)$$

استفاده از قانون احتمال کل

$$\begin{aligned} P_{ij}^{\gamma} &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{m+\gamma} = j, X_{m+1} = k | X_m = i) \\ P_{ij}^{\gamma} &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{m+\gamma} = j | X_{m+1} = k, X_m = i) P(X_{m+1} = k | X_m = i) \\ \Rightarrow P_{ij}^{\gamma} &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{m+\gamma} = j | X_{m+1} = k) P(X_{m+1} = k | X_m = i) \\ \Rightarrow P_{ij}^{\gamma} &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{kj} P_{ik} \end{aligned}$$

# احتمال انتقال چندگامی

▪ استفاده از فرض تغییرناپذیری با زمان و شروع شرط از  $X_0$

$$P_{ij}^{m+n} = P(X_{m+n} = j | X_0 = i)$$

▪ استفاده از قانون احتمال کل  $\Leftarrow$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{m+n} = j, X_m = k | X_0 = i)$$

▪ استفاده از احتمال شرطی  $\Leftarrow$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{m+n} = j | X_m = k, X_0 = i) P(X_m = k | X_0 = i)$$

▪  $X_m$  زنجیره مارکوفی، پس بلاموضوع شدن  $X_0 = i$  در احتمال شرطی نخست  $\Leftarrow$

$$\Rightarrow P_{ij}^{m+n} = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{m+n} = j | X_m = k) P(X_m = k | X_0 = i)$$

$$\Rightarrow P_{ij}^{m+n} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{kj}^n P_{ik}^m, \forall i, j; n, m \geq 0$$

# شهود

$$P_{ij}^{m+n} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{kj}^n P_{ik}^m, \forall i, j; n, m \geq 0$$

شهودی بودن معادلات چپمن-کولمولگروف

رخ دادن زمان  $m$  بین زمان  $0$  و  $m + n$

در زمان  $m$  زنجیره مارکوف در حالتی  $X_m = k$

▪ احتمال انتقال از  $X_0 = i$  به  $X_m = k$   $P_{ik}^m$

▪ احتمال انتقال از  $X_m = k$  به  $X_{m+n} = j$   $P_{kj}^n$

▪ احتمال انتقال از  $X_0 = i$  به  $X_{m+n} = j$  با گذر از  $X_m = k$  در زمان  $m$   $P_{kj}^n P_{ik}^m$

$k$  هر حالتی می تواند باشد

▪ پس کافی است روی تمامی مقادیر حالت  $k$  جمع شود

# نمایش ماتریسی معادلات چپمن-کولمولگروف

$P^{(m)}$  ماتریس با درایه‌های  $P_{ij}^m$

$P^{(n)}$  ماتریس با درایه‌های  $P_{ij}^n$

$P^{(m+n)}$  ماتریس با درایه‌های  $P_{ij}^{m+n}$

▪ درایه  $(i,j)$  ضرب ماتریسی  $P^{(m)}P^{(n)}$  برابر با  $\sum_{k=0}^{\infty} P_{kj}^n P_{ik}^m$

صورت ماتریسی معادلات چپمن-کولمولگروف

$$P^{(m+n)} = P^{(m)}P^{(n)}$$

سخن کوتاه ماتریس انتقال گام  $m + n$  حاصل ضرب  $m$ -گام و  $n$ -گام است.



# محاسبه احتمالات انتقال چندگامی

یا احتمال انتقال دو گامی  $m = n = 1$

$$P^{(2)} = PP = P^2$$

پس روی بازگشتی از  $n$

$$P^{(n)} = P^{(n-1)}P = P^{(n-2)}PP = \dots = P^n$$

قضیه

▪ ماتریس انتقال احتمالات  $n$ -گامی از توان  $n$ -ام ماتریس انتقال حالت بدست می آید یا  $P^{(n)} = P^n$ .

# ویژگی خاص

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{kj} P_{ik}^{(n-1)}$$

$$P_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

# مثال - پیش‌بینی وضع هوا

شانس باران فردا

▪ صرفاً وابسته به شرایط جوی امروز

احتمال «بارش باران در چهار روز آینده» در صورت بارانی بودن امروز

▪  $\alpha = 0.7$  احتمال بارش فردا به شرط بارش امروز

▪  $\beta = 0.4$  احتمال بارش فردا به شرط عدم بارش امروز

# مثال - پیش‌بینی وضع هوا

شانس باران فردا

▪ صرفاً وابسته به شرایط جوی امروز

$$P = \begin{bmatrix} \alpha & 1 - \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{bmatrix}$$

احتمال «بارش باران در چهار روز آینده» در صورت بارانی بودن امروز

▪  $\alpha = 0.7$  احتمال بارش فردا به شرط بارش امروز

▪  $\beta = 0.4$  احتمال بارش فردا به شرط عدم بارش امروز

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

تعریف حالت‌ها

▪ 0: فرایند در حالت 0 در روز بارش

▪ 1: فرایند در حالت 1 در روز عدم بارش

$$P^{(2)} = P^2 = \begin{bmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{bmatrix}$$

$$P^{(4)} = (P^2)^2 = \begin{bmatrix} 0.5749 & 0.4251 \\ 0.5668 & 0.4332 \end{bmatrix}$$

ایجاد زنجیره مارکوف دو حالتی

$$P_{00}^{(4)} = 0.5749$$

احتمال‌های انتقال

# مثال - تبدیل فرایندی به زنجیره مارکوفی

عدم بارش امروز وابسته به دو روز قبل

- اگر دو روز قبل دارای بارش باران، بارش باران در فردا با احتمال ۰,۷
- اگر امروز بارانی و دیروز بدون بارش، بارش باران فردا با احتمال ۰,۵
- اگر امروز بدون باران و دیروز بارش، بارش باران فردا با احتمال ۰,۴
- اگر دو روز بدون بارش، بارش باران فردا با احتمال ۰,۲

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

در صورت بارش در روزهای شنبه و یکشنبه، احتمال بارش در سهشنبه؟

- بارش در سهشنبه معادل قرار گیری فرایند در حالت 0 یا ۱

$$P_{00}^{(2)} + P_{01}^{(2)} = 0.49 + 0.12 = 0.61$$

$$P^{(2)} = P^2 = \begin{bmatrix} 0.49 & 0.12 & 0.21 & 0.18 \\ 0.35 & 0.20 & 0.15 & 0.30 \\ 0.20 & 0.12 & 0.20 & 0.48 \\ 0.10 & 0.16 & 0.10 & 0.64 \end{bmatrix}$$

# مثال - جابجائی توپ رنگی

توپ‌ها دارای رنگ قرمز و یا آبی

- کیسه‌ای شامل دو توپ
- در هر مرحله توپی به تصادف انتخاب و جایگذاری با توپی جدید
- احتمال ۰,۸, توپ هم‌رنگ
- احتمال ۰,۲, توپ با رنگ متضاد
- حالت آغاز دو توپ سرخ
- احتمال اینکه توپ پنجم انتخابی سرخ باشد
- حل؟ نیاز به تعریف زنجیره مارکوف مناسب
- $X_n$  تعداد توپ‌های سرخ در کوزه پس از انتخاب  $n$ -ام و جاگذاری متعاقب آن
- آن‌گاه
- $X_n$  زنجیره مارکوفی با حالت‌های ۰ و ۱ و ۲
- جدول انتقال حالت؟

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

# مثال - جابجائی توپ رنگی

▪ در هر مرحله توپی به تصادف انتخاب و جایگذاری با توپی جدید

▪ احتمال ۰,۸ توپ هم‌رنگ

▪ احتمال ۰,۲ توپ با رنگ متضاد

▪  $X_n$  تعداد توپ‌های سرخ در کوزه پس از انتخاب  $n$ -ام و جاگذاری متعاقب آن

▪  $X_n$  زنجیره مارکوفی با حالت‌های ۰ و ۱ و ۲

▪ جدول انتقال حالت؟

▪  $P_{10}$  یعنی یک توپ سرخ در کوزه به ۰ توپ قرمز مبدل گردد

▪ جهت انجام این کار باید

▪ ابتدا توپ قرمز کوزه انتخاب شود (احتمال  $\frac{1}{3}$ )؟

▪ سپس با جانشینی با توپ آبی (احتمال ۰,۲)؟

▪ پس احتمال  $P_{10} = \frac{1}{3} \times 0.2 = 0.1$

▪ به طریق اولی محاسبه دیگر مقادیر ماتریس انتقال

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

# مثال - جابجائی توپ رنگی

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

جهت یافتن احتمال سرخ بودن در انتخاب چهارم، نیاز به بررسی تعداد سرخ‌ها در کوزه پس از انتخاب چهارم؟  
▪ نمایش با  $e_5$

$$\begin{aligned} P(e_5 = \text{ق}) &= \sum_{i=0}^2 P(e_5 = \text{ق} | X_4 = i) P(X_4 = i | X_0 = 2) \\ &= (0)P_{20}^4 + (0.5)P_{21}^4 + (1)P_{22}^4 = (0.5)P_{21}^4 + (1)P_{22}^4 \end{aligned}$$

▪ محاسبه  $P^4$

$$P_{22}^4 = 0.4872 \text{ و } P_{21}^4 = 0.4352 \text{ ▪}$$

▪ پس  $\Leftarrow$

$$P(e_5 = \text{ق}) = 0.7048 \text{ ▪}$$



# مثال - توزیع در میان کوزه‌ها

هشت کوزه

- توزیع توپ‌ها در میان آن‌ها
- احتمال خالی نبودن دقیقاً سه کوزه پس از توزیع ۹ توپ

$X_n$  تعداد کوزه‌های پر پس از توزیع  $n$  توپ

▪ حالت‌های ممکن 0 و 1 و 2 و ... و 8

▪ احتمالات انتقال

$$P_{ii} = \frac{i}{8} = 1 - P_{i,i+1}, i = \{0, 1, 2, \dots, 8\}$$

▪ احتمال مطلوب  $P_{03}^9$

$$P_{03}^9 = P_{01} P_{13}^8$$

$$P_{01} = 1$$

$$P_{03}^9 = P_{13}^8$$

# مثال - توزیع در میان کوزه‌ها

سوال - احتمال خالی نبودن دقیقاً سه کوزه پس از توزیع ۹ توپ

▪  $X_n$  تعداد کوزه‌های پر پس از توزیع  $n$  توپ

$$P_{ii} = \frac{i}{8} = 1 - P_{ii+1}, i = \{0, 1, 2, \dots, 8\}$$

▪ احتمال مطلوب  $P_{03}^9$

$$P_{03}^9 = P_{13}^8$$

▪ با آغاز از یک کوزه پر شده

▪ ادعا-هدف رسیدن به سه کوزه پر شده پس از توزیع هشت توپ بعدی؟

▪ ادعا- از حالت‌های ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ نمی‌توان به حالت ۳ رفت؟

▪ بنابراین صرفاً نیاز به بررسی حالت‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ جهت یافتن  $P_{13}^8$ ؟

▪ جدول احتمال انتقال

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{7}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{8} & \frac{6}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# مثال - توزیع در میان کوزه‌ها

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{7}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{8} & \frac{6}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

سوال - احتمال خالی نبودن دقیقاً سه کوزه پس از توزیع ۹ توپ

▪  $X_n$  تعداد کوزه‌های پر پس از توزیع  $n$  توپ

$$P_{ii} = \frac{i}{8} = 1 - P_{ii+1}, i = \{0, 1, 2, \dots, 8\}$$

$$P_{03}^9 = P_{13}^8 \text{ احتمال مطلوب}$$

$$P^4 = \begin{bmatrix} \dots\dots\dots 2 & \dots\dots 256 & \dots\dots 2563 & \dots\dots 7178 \\ 0 & \dots\dots 39 & \dots\dots 952 & \dots\dots 9009 \\ 0 & 0 & \dots\dots 198 & \dots\dots 9802 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{13}^8 = \dots\dots\dots 2 \times \dots\dots 2563 + \dots\dots 256 \times \dots\dots 952 + \dots\dots 2563 \times \dots\dots 198 + \dots\dots 7178 \times \dots = \dots\dots 756$$

# مثال - سه شیر متوالی

پرتاب سکه‌های سالم مستقل

- $N$  تعداد پرتاب‌ها تا رسیدن به سه شیر متوالی
- $P(N \leq 8)$  و  $P(N = 8)$ ؟

حل - زنجیره مارکوفی با حالت‌های 0 و 1 و 2 و 3

▪  $i < 3$  به معنای ادامه پرتاب‌ها تا رسیدن به سه شیر متوالی

▪  $i = 3$  رخ دادن سه شیر متوالی

▪ ماتریس احتمال انتقال  $\Leftarrow$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# مثال - سه شیر متوالی

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

▪  $P(N = ۸)$  و  $P(N \leq ۸)$  ؟

▪ ماتریس احتمال انتقال  $\Leftarrow$

$$P^8 = \begin{bmatrix} \frac{۸۱}{۲۵۶} & \frac{۴۴}{۲۵۶} & \frac{۲۴}{۲۵۶} & \frac{۱۰۷}{۲۵۶} \\ \frac{۶۸}{۲۵۶} & \frac{۳۷}{۲۵۶} & \frac{۲۰}{۲۵۶} & \frac{۱۳۱}{۲۵۶} \\ \frac{۴۴}{۲۵۶} & \frac{۲۴}{۲۵۶} & \frac{۱۳}{۲۵۶} & \frac{۱۷۵}{۲۵۶} \\ \frac{۰}{۲۵۶} & \frac{۰}{۲۵۶} & \frac{۰}{۲۵۶} & \frac{۱}{۲۵۶} \end{bmatrix}$$

▪  $P(N \leq ۸)$  ؟

$$\frac{۱۰۷}{۲۵۶}$$

▪  $P(N = ۸)$  ؟

▪  $N = ۸$  به معنای تا ۷ انتقال سه شیر اتفاق نیفتاده است و حالت پس از هفت انتقال برابر حالت ۲ و پرتاب بعدی شیر می‌آید  $\Leftarrow$

$$P(N = ۸) = \frac{1}{2} P_{02}^7$$

# مثال

$\{X_n, n \geq 0\}$  زنجیره مارکوفی با حالت‌های 0 و 1 و 2 و 3

$$P_{ij}; i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$$

▪  $N$  تعداد انتقال‌ها تا دیدن الگوی 1, 2, 1, 2 و با شروع از حالت صفر

$$N = \min\{n \geq 0: X_{n-3} = 1, X_{n-2} = 2, X_{n-1} = 1, X_n = 2\}$$

▪ به ازای  $k$  دلخواه به دنبال محاسبه  $P(N \leq k)$

▪ تعریف زنجیره مارکوفی جدید  $\{Y_n, n \geq 0\}$  استفاده جهت ردگیری حرکت به سمت الگو

▪ تعریف  $Y_n$

▪ اگر الگو در انتقال  $n$ -ام یافت شد یا بدیگر سخن  $X_0, \dots, X_n$  شامل 1, 2, 1, 2 آن‌گاه  $Y_n = 4$

▪ اگر الگو تا انتقال  $n$ -ام یافت نشده آن‌گاه

▪  $Y_n = 1$  اگر  $X_n = 1$  و  $(X_{n-2}, X_{n-1}) \neq (1, 2)$

▪  $Y_n = 2$  اگر  $X_n = 2, X_{n-1} = 1$

▪  $Y_n = 3$  اگر  $X_n = 1, X_{n-1} = 2, X_{n-2} = 1$

▪  $Y_n = 5$  اگر  $X_n = 2$  و  $X_{n-1} \neq 1$

▪  $Y_n = 6$  اگر  $X_n = 0$

▪  $Y_n = 7$  اگر  $X_n = 3$

•  $Y_n = 1, 2, 3, 4$  به معنای حرکت به سمت الگو یا رسیدن به آن با مقدار 4

•  $Y_n = 5, 6, 7$  به معنای عدم وجود علائم پیشرفت به سمت الگو و حالت فعلی 2 یا 0 یا 3

# مثال

▪ تعریف  $Y_n$

▪ اگر الگو در انتقال  $n$ -ام یافت شد یا بدیگر سخن  $X_n, \dots, X_1$  شامل  $1, 2, 1, 2$  آن گاه  $Y_n = 4$

▪ اگر الگو تا انتقال  $n$ -ام یافت نشده آن گاه

▪  $Y_n = 1$  اگر  $X_n = 1$  و  $(1, 2) \neq (X_{n-2}, X_{n-1})$

▪  $Y_n = 2$  اگر  $X_n = 2, X_{n-1} = 1$

▪  $Y_n = 3$  اگر  $X_n = 1, X_{n-1} = 2, X_{n-2} = 1$

▪  $Y_n = 5$  اگر  $X_n = 2$  و  $X_{n-1} \neq 1$

▪  $Y_n = 6$  اگر  $X_n = 0$

▪  $Y_n = 7$  اگر  $X_n = 3$

▪ آن گاه  $P(N \leq k)$

▪ برابر با احتمال تعداد انتقال های زنجیره مارکوف  $Y_n$  هنگامی که از حالت ۶ به ۴ حرکت می کند کمتر از  $k$  باشد

▪ زیرا حالت ۴ حالت جذب کننده (تعریف بیشتر بعدا)

▪ به دیگر سخن،  $Q_{ij}$  احتمال انتقال زنجیره مارکوف  $Y_n$

▪ به دنبال  $Q_{64}^k$

# مثال -

زنجیره مارکوف با حالت‌های ۱, ۲, ۳, ۴, ۵

مطلوب است  $P(X_4 = 2, X_3 \leq 2, X_2 \leq 2, X_1 \leq 2 | X_0 = 1)$

▪ به چه معنا؟ با آغاز از حالت ۱ زنجیره در زمان ۴ در حالت ۲ باشد بدون اینکه به حالت‌های  $\mathcal{A} = \{3, 4, 5\}$  وارد شده باشد.

جهت محاسبه صرفاً نیاز به  $P_{11}$  و  $P_{12}$  و  $P_{21}$  و  $P_{22}$

فرض  $P_{11} = 0.3$  و  $P_{12} = 0.3$  و  $P_{21} = 0.1$  و  $P_{22} = 0.2$

می‌توان زنجیره مارکوف را شامل سه حالت ۱, ۲, ۳ دانست حالت  $\mathcal{A}$  را ۳ نامیده‌ایم. ماتریس

$$Q = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

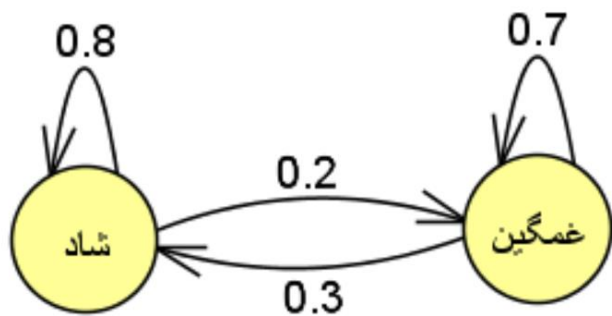
به دنبال  $Q_{12}^4$

$$Q^4 = \begin{bmatrix} 0.0219 & 0.0285 & 0.9496 \\ 0.0095 & 0.0124 & 0.9781 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



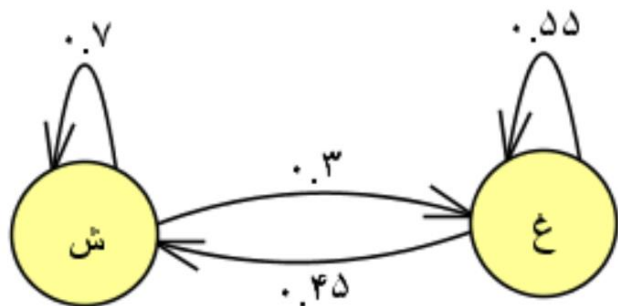
# شادی و غم گیتی نمی کنند دوام - دوام مثال!

تغییر حال در یک روز



$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

احتمال‌های انتقالی بین امروز و پس فردا



$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.45 & 0.55 \end{bmatrix}$$

# شادی و غم گیتی نمی کنند دوام - دوام مثال دوام!

پس از یک هفته و پس از سی روز

$$P^{30} = \begin{bmatrix} 0.6000 & 0.4000 \\ 0.6000 & 0.4000 \end{bmatrix}$$

$$P^7 = \begin{bmatrix} 0.6031 & 0.3969 \\ 0.5953 & 0.4047 \end{bmatrix}$$

تقریبا برابر  
▪ وجود  $P^n$  حد  
 $n \rightarrow \infty$   
▪ حد منظم

حالت از حالت آغاز مستقل می شود.

▪ منطق

▪ شرط آغازین در حافظه تک گامی نهایتا فراموش خواهد شد

# احتمال غیر شرطی

تاکنون تمامی احتمالات شرطی  $P_{ij}^n = P(X_n = j | X_0 = i)$

- همچنین نیاز به احتمال غیر شرطی  $p_j(n) = P(X_n = j)$
- نیاز به مشخص کردن شرط آغاز یا احتمال آغاز  $p_i(0) = P(X_0 = i)$
  - استفاده از قانون احتمال کل و تعریف  $P_{ij}^n$  و  $p_j(n)$

$$\begin{aligned} p_j(n) = P(X_n = j) &= \sum_{i=0}^{\infty} P(X_n = j | X_0 = i) P(X_0 = i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} P_{ij}^n p_i(0) \end{aligned}$$

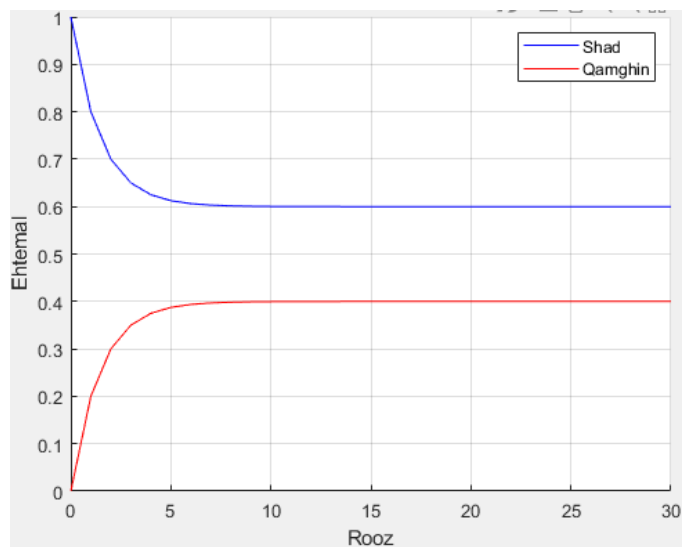
صورت ماتریسی  $\mathbf{p}(n) = [p_1(n), p_2(n), \dots]^T$

$$\mathbf{p}(n) = (P^n)^T \mathbf{p}(0)$$

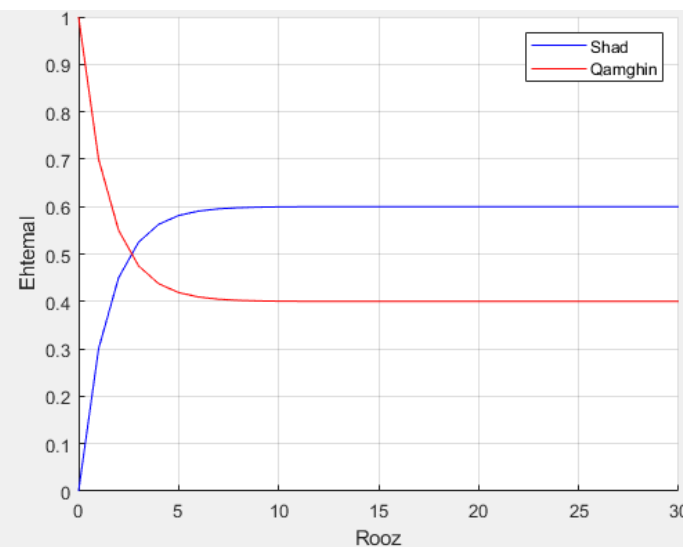
# شادی و غم گیتی نمی کنند دوام - دوام مثال!

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} \text{ ماتریس احتمال انتقال}$$

$$p(0) = [1 \ 0]^T$$



$$p(0) = [0 \ 1]^T$$



با افزایش  $N$   $\rightarrow$

# منابع

[پینسکی]

[راس]

[زانلا]

[هایز] B. Hayes, “First Links in the Markov Chain,” *American Scientist*, V. 101, pp. 92-97, Mar-Apr 2013.

[Mateos] G. Mateos, “ECE440 - Introduction to Random Processes,”  
<http://www2.ece.rochester.edu/~gmateosb/ECE440.html>

[Ribeiro] A. Ribeiro, “ESE 303 - Stochastic Systems Analysis and Simulation,” <https://ese303.seas.upenn.edu/>